

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И МОЛОДЁЖИ  
РЕСПУБЛИКИ КРЫМ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ КРЫМ  
«МАЛАЯ АКАДЕМИЯ НАУК «ИСКАТЕЛЬ»

**Всероссийский конкурс юных исследователей окружающей среды  
им. Б. В. Всесвятского**

**Номинация: «Астрономия и изучение  
космического пространства»**

**ВЫЧИСЛЕНИЕ РАДИУСА ЗЕМЛИ  
МЕТОДОМ ЭРАТОСФЕНА**

Работу выполнила:  
**Терлекчи Алие Амедовна,**  
учащаяся 9 класса  
муниципального бюджетного  
общеобразовательного учреждения  
«Средняя общеобразовательная школа  
имени Георгия Константиновича  
Жукова №29» города Симферополь  
Республики Крым

Научный руководитель:  
**Макарова Мария Олеговна,**  
педагог дополнительного образования  
государственного бюджетного  
образовательного учреждения  
дополнительного образования  
«Малая академия наук «Искатель»  
Республики Крым

## СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ .....	2
ВВЕДЕНИЕ.....	3
РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ .....	4
1.1. Общие сведения о Земле .....	4
1.2. Метод Эратосфена.....	4
1.3. Движение Солнца и Земли .....	5
1.3.1. Суточное движение.....	6
1.3.2. Годовое движение .....	6
1.3.3. Высота Солнца над горизонтом и связь с широтой местности.....	6
1.3.4. Аналемма .....	7
1.4 Небесный меридиан .....	7
1.4.1 Полдень .....	8
1.5. Вычисление высоты Солнца .....	8
1.6. Вычисление угла сектора окружности.....	9
1.7. Вычисление расстояния между точками наблюдений .....	10
1.8. Вычисление длины окружности и радиуса .....	11
1.9. Вычисление погрешности .....	11
РАЗДЕЛ 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ .....	12
1.1. Построение установки .....	12
2.2. План наблюдений.....	15
2.2.1. Выбор места наблюдений .....	15
2.2.2. Настройка установки .....	15
2.2.3. Начало съемки .....	16
2.2.4. Конец съемки.....	17
2.3. Наблюдения .....	17
2.4. Обработка наблюдений .....	18
2.5. Расчёты.....	20
2.6. Выводы по методу Эратосфена .....	23
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	24
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	25

## ВВЕДЕНИЕ

Уже древним цивилизациям было известно о том, что Земля имеет шарообразную форму. Они делали такие выводы, наблюдая за Солнцем и Луной. А в моменты лунных затмений видели, как Земля откидывает свою тень круглой формы на диск Луны. Тогда вставал практический вопрос: как измерить радиус нашей планеты? Одним из тех, кто первый дал ответ на подобный вопрос, был Эратосфен. Его метод прост и нагляден, и я решила его воспроизвести.

Меня поражает тот факт, что в древнее время люди сумели узнать размер нашей планеты, применив примитивное оборудование и геометрию. Эта тема меня заинтересовала тем, что она осуществима практически, я создала установку и выполнила измерения.

**Цели:** произвести вычисления радиуса Земли методом Эратосфена; оценить точность метода, сравнив полученные данные с современными.

### **Задачи:**

- изучить историю вычисления радиуса Земли;
- подготовить теоретическое обоснование;
- провести необходимые наблюдения;
- произвести расчеты и сравнить с уже известными данными;
- рассчитать погрешность вычислений;
- сделать выводы о методе.

## РАЗДЕЛ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1.1. Общие сведения о Земле

Земля – третья планета Солнечной системы. Относится к земной группе, то есть к планетам, обладающим твердой поверхностью. Принято считать, что Земля имеет шарообразную форму, однако в действительности, вследствие вращения Земли вокруг своей оси, центробежная сила «сплющивает» её у полюсов. Ученые назвали эту фигуру геоидом (от греч. букв. – «нечто подобное Земле») (Рис. 1.1.).

Следовательно, у такой неправильной формы радиусы будут отличаться в разных направлениях. Разница между полярным и экваториальным радиусами составляет порядка 21 км. По современным данным усредненные значения радиуса Земли составляют:

- экваториальный – 6378,1 км;
- полярный – 6356,8 км;
- средний – 6371,3 км.

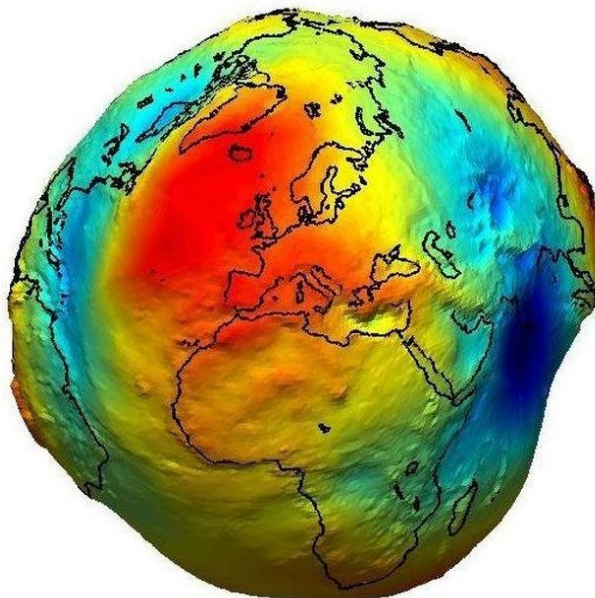


Рисунок 1.1 – Истинная форма Земли.

### 1.2. Метод Эратосфена

По дошедшим до нас сведениям, 19 июня 240 года до н.э. Эратосфен первым вычислил радиус Земли. Зная, что во время летнего солнцестояния Солнце освещает дно глубоких колодцев в г. Сиене (ныне называемая г. Асуан, Египет), а в г. Александрии — нет (Рис. 1.2.). Он использовал этот факт для измерения окружности и радиуса Земли.

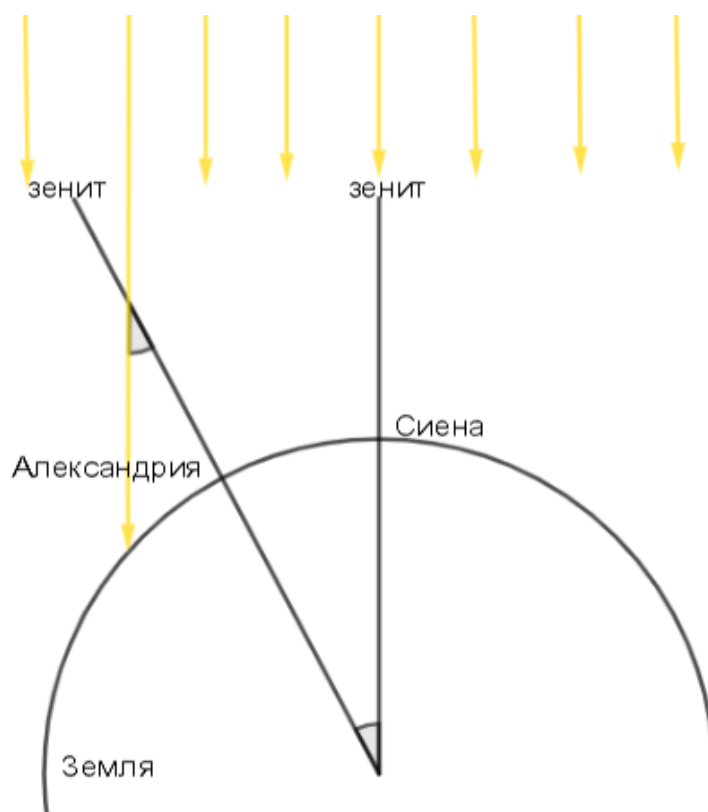


Рисунок 1.2. – Схематическое изображение метода Эратосфена.

Эратосфен, будучи в Александрии, применил скафис – чашу с длинной иглой (Рис 1.3.), при помощи которого можно было определить под каким углом Солнце находится на небе.

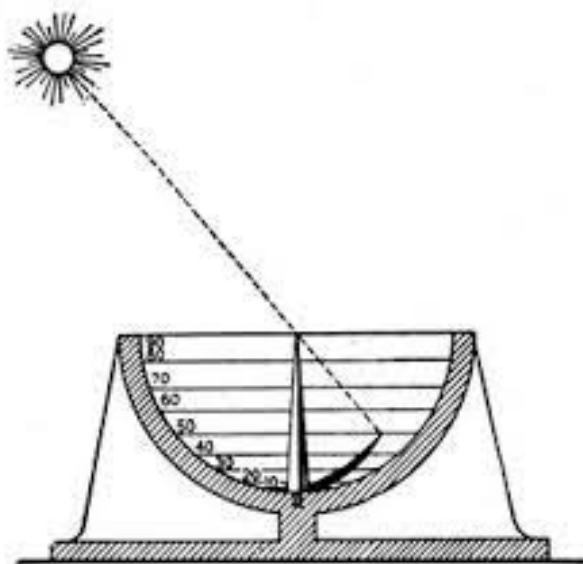


Рисунок 1.3. – Скафис – чаша для измерения высоты солнца.

После измерения угол оказался 7 градусов 12 минут, то есть  $\frac{1}{50}$  окружности. Получается, Сиена отстоит от Александрии на  $\frac{1}{50}$  окружности Земли, то есть, в 5000 стадиях, следовательно окружность Земли равнялась 250000 стадиям, а радиус тогда 39790 стадиев.

Неизвестно каким стадием пользовался Эратосфен. Если греческим – 178 метров, то по его измерениям радиус Земли равнялся 7082 км, если египетским – 172,5 метра, то 6287 км. Результат Эратосфена оказался очень близким к современному, погрешность составила от 84 до 711 км, или от 1 до 11%.

### 1.3. Движение Солнца и Земли

Для дальнейшего понимания принципа измерения радиуса Земли необходимо понимать характер движения как Солнца, так и Земли. Различают два вида движения Солнца – суточное и годовое.

#### 1.3.1. Суточное движение

Как известно Солнце и другие небесные объекты восходят на востоке, а заходят на западе и это происходит вследствие вращения Земли вокруг своей оси. Один оборот равен 24 часам или 1 суткам, отсюда и происходит название этого движения – суточное. Это самое заметное для нас движение, днем мы видим перемещение Солнца по небосводу, а ночью – звездного неба.

#### 1.3.2. Годовое движение

Но также есть и другой тип движения Солнца, который не так заметен. Это движение по звездному небу. Круг, описываемый Солнцем за год, вследствие этого движения называется эклиптикой. Однако годовое движение Солнца примечательно еще и тем, что момент верхней кульминации каждый день меняется. Это происходит из-за наклона земной оси к плоскости орбиты и следовательно эклиптика находится под углом к плоскости орбиты (Рис. 1.4.).

Угол наклона эклиптики к экватору равен углу наклона земной оси и соответствует  $23^{\circ}27'$ .

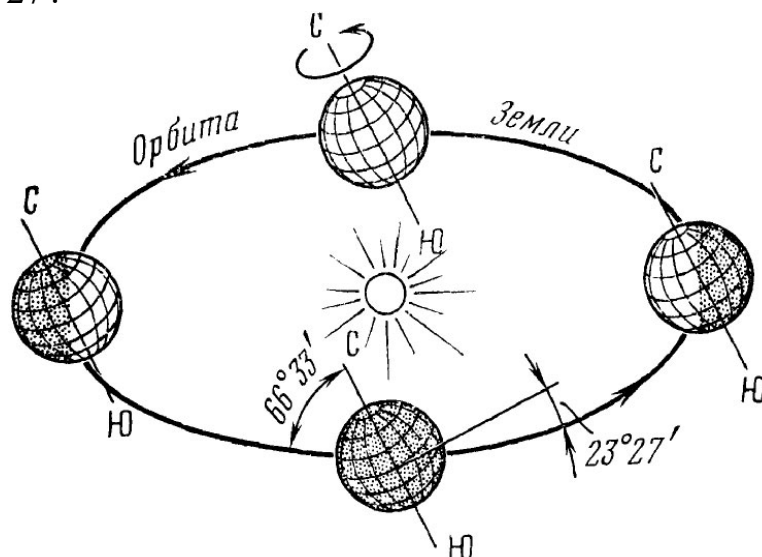


Рисунок 1.4. – Обращение Земли вокруг Солнца.

#### 1.3.3. Высота Солнца над горизонтом и связь с широтой местности

Высота небесного тела над горизонтом – это величина угла между горизонтом и направлением луча зрения на небесное тело, где значение угла на горизонте равно  $0^{\circ}$ , а в точке зенита  $90^{\circ}$ .

Широта местности – это координата в сферической системе координат, отсчитываемая от экватора, где значение равно  $0^\circ$ , к полюсам, где значение равно  $\pm 90^\circ$ . Таким образом, широта точек, лежащих в северном полушарии – положительна, а в южном – отрицательна. В дни равноденствий широта местности равна высоте Солнца над горизонтом. Следовательно Солнце может быть в зените только на широте в пределах  $\pm 23^\circ 27'$ , вследствие наклона Земной оси. Исходя из этого, можно сделать вывод, что Сиена лежала на  $\pm 23^\circ$  северной широты. На широтах выше  $\pm 23^\circ 27'$  и до полярного круга  $\pm 66^\circ 33'$  Солнце восходит и заходит каждый день, однако в течении года высота кульминации может варьироваться в пределах  $46^\circ 52'$ . За полярным кругом Солнце может вовсе не появиться над горизонтом, либо наоборот не скрыться за ним за одни сутки, такие моменты называют полярной ночью или полярным днем.

### 1.3.4. Аналемма

Аналемма — фигура описываемая небесным телом на небосводе, если зарисовывать его положение относительно наблюдателя на небосводе в одно и то же время и в течении одного цикла. Пример аналеммы для Солнца изображен на (Рис. 1.5.).

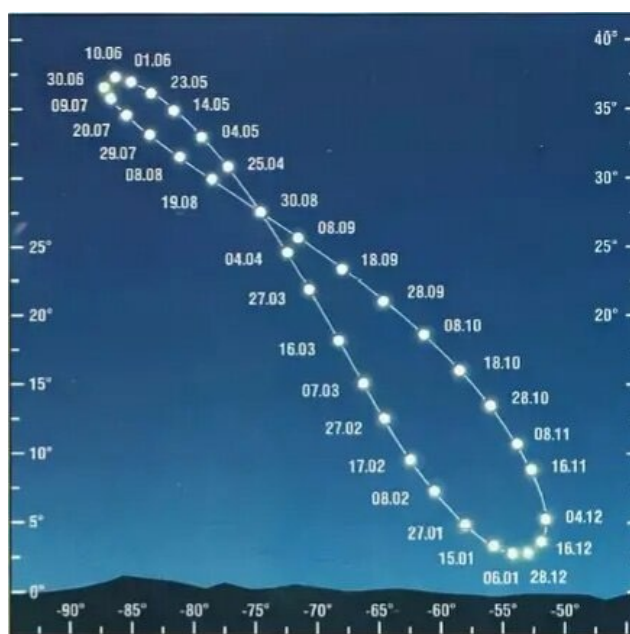


Рисунок 1.5. – Аналемма Солнца.

Форма аналеммы Солнца на небосводе Земли имеет вид «восьмёрки» и определяется наклоном земной оси к плоскости эклиптики, эллиптичностью земной орбиты и ориентацией земной оси относительно главных осей эллипса земной орбиты. Наивысшее положение Солнца на аналемме (точнее — имеющее наибольшее склонение) соответствует летнему солнцестоянию, наинизшее (с наименьшим склонением) — зимнему. Положение в перекрестии «восьмёрки» Солнце занимает два раза в год, в середине апреля и в конце августа. Эти даты не совпадают с весенним и осенним равноденствием, а сдвинуты к лету (в южном полушарии к зиме), что связано с эллиптичностью земной орбиты.

Самое главный вывод из наблюдения аналеммы можно сделать такой, что истинный полдень и полдень по среднему звездному времени наступает только

4 раза в год. В остальное время или опережает, или отстает. Что свидетельствует о неравномерном движении Земли вокруг Солнца, а также вокруг своей оси.

### 1.4 Небесный меридиан

Небесный меридиан — большой круг небесной сферы, плоскость которого проходит через отвесную линию и ось мира. Пересекается с горизонтом в точках севера и юга. А полуденная линия — проекция меридиана на плоскость математического горизонта, проходящая от севера к югу. В момент, когда Солнце пересекает небесный меридиан, оно имеет наивысшее положение над уровнем горизонта и предметы отбрасывают свою тень на полуденную линию.

#### 1.4.1 Полдень

Полдень — момент времени в середине дня между восходом и заходом Солнца. Стоит различать два типа полудня. Момент верхней кульминации Солнца, когда оно проходит через линию меридиана, называется «солнечный полдень» или «истинный полдень». А также «полднем» принято называть момент времени, когда часы показывают 12:00 по местному времени, хотя «солнечный полдень» может наступать раньше или позже 12 часов дня, принято это время называть «местный полдень». Величина разницы между истинным и средним полднем вызвана многими факторами: часовые пояса, наклон земной оси, эллиптичности орбиты, неравномерность вращения вследствие гравитационных взаимодействий. Для нас важно понимать, что это вычисляемая и табличная величина и разницу можно узнать в специальных программах или астрокалендарях.

### 1.5. Вычисление высоты Солнца

Для вычисления высоты Солнца над горизонтом мы прибегнем к измерению тени отбрасываемой гномоном — заостренным шестом, расположенным вдоль отвесной линии.

Рассмотрим прямоугольный треугольник (Рис. 1.6.), в котором один катет будет высотой гномона —  $h$ , а второй длиной отбрасываемой тени —  $l$ . Тогда гипотенуза будет указывать в направлении Солнца, а угол  $\alpha$  — высоту Солнца над горизонтом.

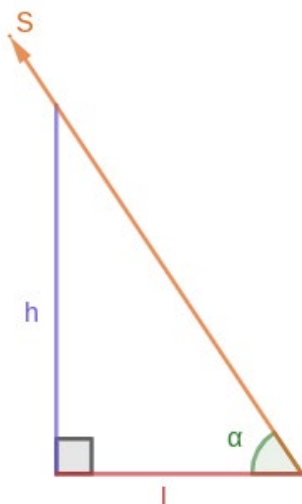


Рисунок 1.6. – Геометрическое построение для вычисления высоты Солнца.

Для нахождения угла  $\alpha$ , достаточно вычислить его по формуле 1.1.:

$$\alpha_{rad} = \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{l} \right) \quad (1.1)$$

однако полученное значение будет в радианах. Радианы – это альтернативная градусам единица измерения углов. Для того чтобы получить значение в десятичных градусах необходимо умножить эту величину на коэффициент перевода по формуле 1.2.:

$$\alpha_{grad} = \operatorname{arctg} \left( \frac{h}{l} \right) \times \left( \frac{180^\circ}{\pi} \right) \quad (1.2)$$

### 1.6. Вычисление угла сектора окружности

Метод Эратосфена основывается на вычислении угла дуги окружности меридиана между долготой наблюдателя и долготой города, в котором Солнце заведомо было в зените на дату наблюдения.

Однако, не обязательно ждать подходящей даты. Можно провести наблюдения солнечной тени в двух различных далеко расположенных друг от друга точках и этого будет достаточно для дальнейших расчетов.

Исходя из предположения, что солнечные свет падает на всю земную поверхность параллельными лучами, мы можем построить геометрическую модель, для случая наблюдения Солнца с двух различных долгот.

Рассмотрим две параллельные прямые  $a$  и  $b$  (Рис. 1.7.), которые будут солнечными лучами падающими на земную поверхность. А также прямоугольные треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$ , где  $BC$  и  $B'C'$  – это гномоны,  $AB$  и  $A'B'$  – образованные гномонами тени от солнечных лучей, а  $AC$  и  $A'C'$  – гипотенузы прямоугольных треугольников, образованные солнечными лучами. Исходя из того что гномоны устанавливаются по отвесной линии, то нижний его конец направлен к центру Земли, следовательно линии  $OC$  и  $OC'$  является прямыми.

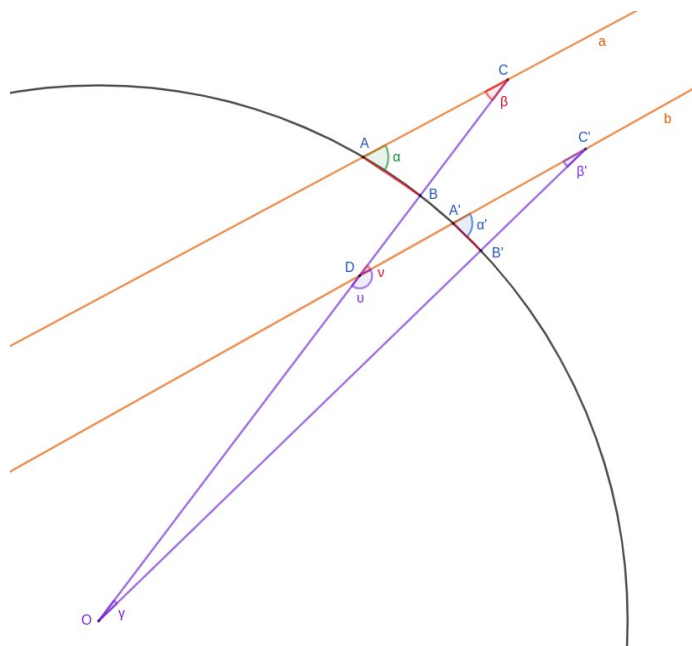


Рисунок 1.7. – Геометрическое построение для вычисления угла опирающегося на дугу окружности.

В предыдущем разделе я описала как вычислить углы  $\alpha$  и  $\alpha'$ , а углы  $\beta$  и  $\beta'$  вычисляются из свойства прямоугольного треугольника по формуле 1.3.:

$$\beta = 90^\circ - \alpha \quad (1.3)$$

Исходя из этого мы можем найти угол  $\gamma$ , который является углом между точками наблюдений на двух различных долготах, и опирается на дугу окружности  $BB'$ . Рассмотрим два параллельных луча  $a$  и  $b$ , и линию  $OC$ , пересекающую их, тогда угол  $\nu$  равен углу  $\beta$  как накрест лежащий, следовательно по свойству смежных углов  $u$  он вычисляется по формуле 1.4.:

$$u = 180^\circ - \nu \quad (1.4)$$

По теореме о сумме углов треугольника  $\gamma$  вычисляется по формуле 1.5.:

$$\gamma = 180^\circ - (u + \beta') \quad (1.5)$$

Приведем все в единую формулу и выразим угол  $\gamma$  через высоты Солнца:

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - (u + \beta') \\ \gamma &= 180^\circ - ((180^\circ - \beta) + \beta') \\ \gamma &= 180^\circ - ((180^\circ - (90^\circ - \alpha)) + (90^\circ - \alpha')) \\ \gamma &= 180^\circ - (180^\circ - 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha') \\ \gamma &= 180^\circ - 180^\circ - \alpha + \alpha' \\ \gamma &= \alpha' - \alpha \end{aligned}$$

При этом  $\alpha'$  должна быть больше  $\alpha$ . Или иначе говоря угол  $\gamma$  это модуль величины разности, и его можно вычислить по формуле 1.6:

$$\gamma = |\alpha - \alpha'| \quad (1.6)$$

Таким образом, измерив высоту Солнца в двух различных точках, мы получим угол сектора окружности  $\gamma$ .

### 1.7. Вычисление расстояния между точками наблюдений

Для вычисления длины окружности и радиуса необходимо знать не абсолютное расстояние между точками наблюдений (Рис. 1.8.), обозначенной пунктирной линией, а только разницу расстояния  $l$  по меридиану, обозначенной сплошной стрелкой.

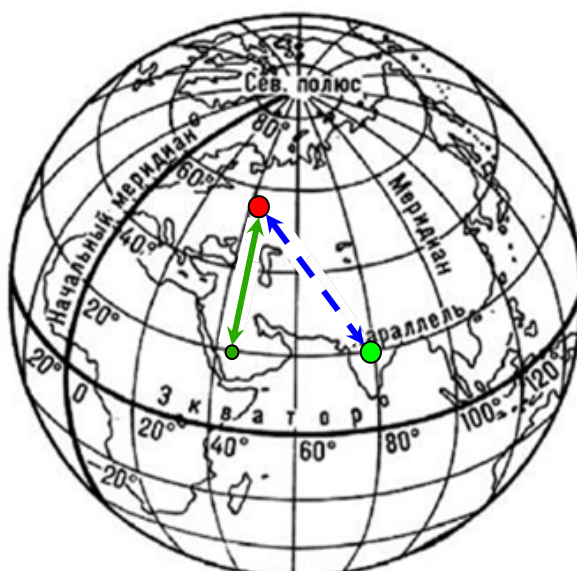


Рисунок 1.8. – Определение расстояния между точками наблюдений.

### 1.8. Вычисление длины окружности и радиуса

Зная угол и расстояние по меридиану между точками наблюдений, мы можем вычислить длину окружности по меридиану по формуле 1.7.:

$$L = \left( \frac{360^\circ}{\gamma} \right) \times l \quad (1.7)$$

Следовательно радиус по меридиану можно найти по формуле 1.8.:

$$R = \frac{L}{2\pi} \quad (1.8)$$

или, если вывести единую формулу, то для расчета радиуса можно воспользоваться формулой 1.9.:

$$R = \frac{\frac{360^\circ}{\gamma} \times l}{2\pi} = \frac{180^\circ \times l}{\gamma \times \pi} = \frac{180^\circ \times l}{|\alpha - \alpha'| \times \pi} \quad (1.9)$$

### 1.9. Вычисление погрешности

Для оценки погрешности мы будем вычислять:

абсолютную погрешность полученных результатов по формуле 1.10.

$$\Delta R = R_{calc} - R_{real} \quad (1.10)$$

относительную погрешность полученных результатов по формуле 1.11

$$\delta R = \left| \frac{\Delta R}{R_{real}} \right| \times 100\% \quad (1.11)$$

## РАЗДЕЛ 2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### 1.1. Построение установки

Эратосфен в своем методе использовал скафис (чашу с шестом), я же применила гномон и размеченный лист, который практически не имеет различий со скафисом. Принцип один – отбрасывание тени на размеченную поверхность.

Первые пробные попытки измерить длину тени были сделаны с подручными средствами – карандаш, который я держала в руках, выступал в качестве гномона, а на бумагу в клетку падала тень. Каждые 15 минут, прикладывая карандаш к отмеченной точке, я зарисовывала тень. Как показала практика, это неточный метод, так как карандаш и бумага всё время смещались, точки отмечались неравномерно, дрожащая тень только усугубляла положение.

Поэтому, для усовершенствования установки, карандаш я приклеила к двум прямоугольным линейкам которые давали ей устойчивое положение. В дальнейшем выяснилось, что горизонтальность поверхности тоже имеет большое значение.

Нарисовав примерный чертеж, я обратилась за помощью в построении установки к моим научным руководителям. В ходе обсуждения и доработок получилась установка, изображенная на Рис 2.1.а. и Рис 2.1.б.

В ровной доске были сделаны отверстия под винты. Добавлены три винта, которыми можно регулировать горизонтальность плоскости, а контролировать ее помогают приклеенные капсулы от разобранного пузырькового уровня. Теперь установка стала регулируемой по горизонтали. Гномон был заменен на острый металлический стержень, под который было сделано отверстие для установки его в одном единственном месте на всей плоскости. Высота гномона была строго задана и равнялась 10 см, а для точной установки по вертикали его подпирали две прямоугольные линейки, опирающиеся на плоскость поверхности доски.

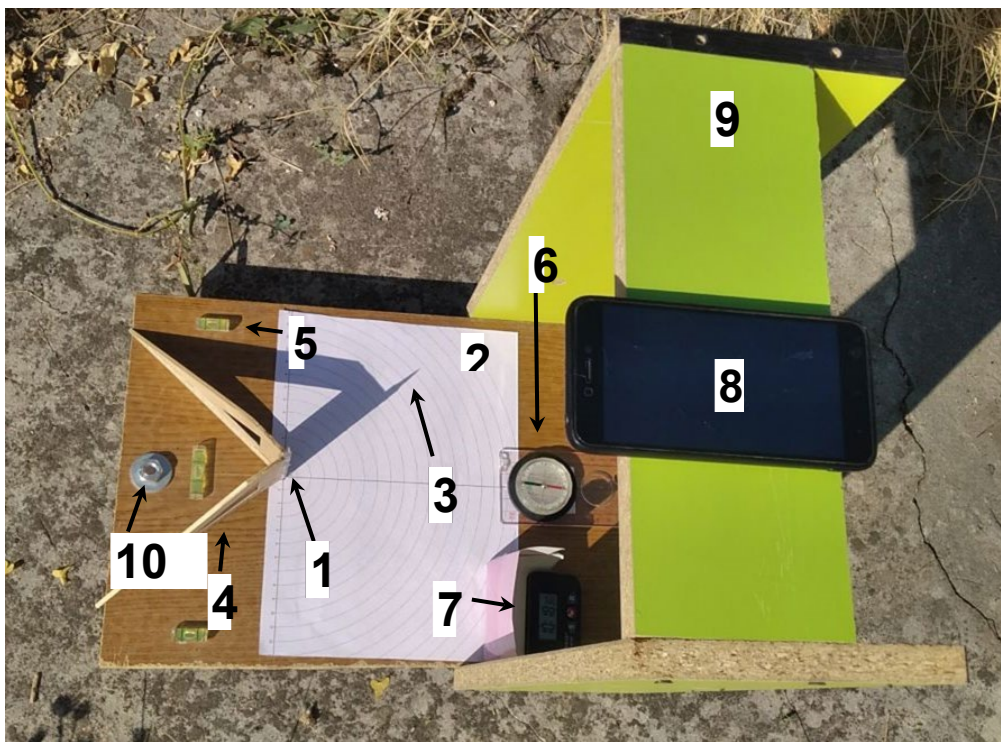


Рисунок 2.1.а. – Внешний вид установки, вид сверху, где  
 1 – гномон, 2 – размеченный лист, 3 – тень от гномона,  
 4 – подпорные линейки, 5 – уровень, 6 – компас, 7 – часы,  
 8 – телефон, 9 – подставка для телефона, 10 – опорный винт.



Рисунок 2.1.б. – Внешний вид установки, вид с торца и тыла, где  
 11 – регулировочные винты.

Тень от гномона падала на лист (Рис 2.2.), размеченный концентрическими дугами, расходящимися из центра, с шагом в 1 мм. Каждый 10 шаг на листе отмечен более толстой линией. Лист закреплялся по периметру, совмещая свой центр с центром гномона.

Для примерного позиционирования по направлениям сторон света я использовала компас. А для слежения за временем – часы, прикрытые козырьком (иначе невозможно было разглядеть время из-за яркого солнечного света).

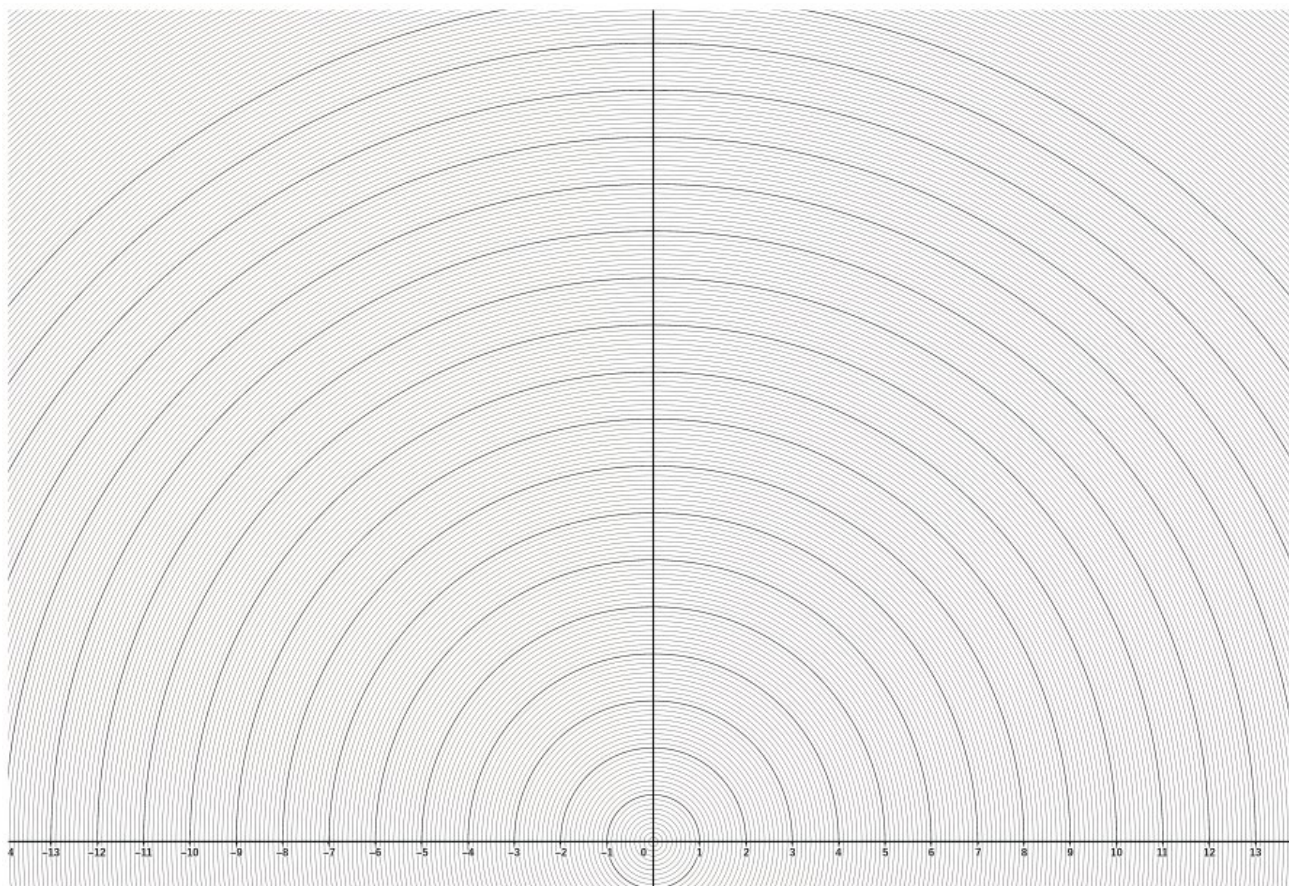


Рисунок 2.2. – Лист для зарисовки тени.

Однако, с зарисовкой тени появились проблемы. Зарисовывая карандашом, постоянно приходилось находиться у установки и, соблюдая равные промежутки времени, отмечать точку кончика тени гномона, что получалось не всегда точно, т.к. точка от карандаша не всегда точно попадала на самый кончик тени, который иногда в облачную погоду становился невидимым. А каждое новое прикосновение к установке, произвольно её сдвигало. К тому же, после каждого наблюдения приходилось менять лист, закрепление и позиционирование нового – не тривиальная задача. И из всех зарисованных точек, на самом деле нам нужна только одна, это ближайшая к гномону, то есть соответствующая самой короткой тени в момент истинного полудня.

Так я снова обратилась за помощью к преподавателям. И на этот раз была сделана подставка под телефон. Запуская на телефоне видеосъемку в режиме таймлапса с интервалом одного кадра раз в 10 секунд, я получала ускоренное видео движения тени. У этого способа намного больше преимуществ, материал наблюдений получался качественнее, видео можно покадрово пересматривать, установка все время наблюдений остается неподвижной, а лист бумаги всегда был закреплен точно в одном месте.

Таким образом, для простоты эксплуатации, повторяемости и точности, которая гарантируется систематической погрешностью применяемым оборудованием, итеративно была построена данная установка в том виде, в котором она показана в данной работе.

## **2.2. План наблюдений**

Так как для проведения моих измерений необходимо было уехать как можно дальше вдоль меридиана и произвести наблюдения в момент полудня, то я заранее подготовилась, и на пробных попытках измерений дома выработала план проведения наблюдений.

### **2.2.1. Выбор места наблюдений**

Я выбирала место наблюдений по ряду критериев.

1. Место должно быть открытым и относительно ровным.
2. Место должно быть ориентированным на юг.
3. В течении всего хода проведения наблюдения, Солнце не должно скрываться за деревьями, зданиями или иными предметами.
4. Место должно было оказаться мало проходимым, на записи не должны присутствовать тени прохожих или любопытных людей, проезжающих машин и животных, которые могут помешать процессу съемки или нарушить положение установки.

### **2.2.2. Настройка установки**

Ниже я опишу процесс подготовки установки к наблюдениям.

1. На горизонтальную, ровную и прочную плоскость ставим установку.
2. Компасом направляем установку на юг (Рис 2.3.).
3. С помощью регулировочных винтов плоскость установки выводим в горизонтальный уровень, добиваясь чтобы пузырьковые уровни показывали горизонталь по двум перпендикулярным осям, так, чтобы пузырек в капсуле был ровно посередине между двумя рисками.
4. Затягиваем контргайки, для полного закрепления положения установки.
5. Отдельным пузырьковым уровнем, прикладывая к поверхности в разных местах и направлениях, перепроверяем горизонтальность (Рис. 2.4.). Место может быть таким неровным, что длина одного регулировочного винта получается намного больше, чем другого.
6. Сверяем часы на установке с телефоном.
7. Записываем координаты места наблюдения и высоту над уровнем моря.



Рисунок 2.3. – Подготовка установки – направляем на юг.



Рисунок 2.4. – Проверка горизонтальности установки.

### 2.2.3. Начало съемки

Перед началом запуска видео, обязательно:

1. Ставим телефон на видеосъемку в таймлапс с интервалами в 10 сек.
2. В кадр должна попасть вся поверхность установки, со всеми измерительными приборами.
3. После запуска видеосъемки телефон накрываем коробкой, чтобы он не перегрелся на Солнце, и не выключился из-за этого в процессе.

### 2.2.4. Конец съемки

1. Останавливаем видеосъемку.
2. Убеждаемся, что видеофайл сохранился.
3. Аккуратно собираем установку до следующего наблюдения.

### 2.3. Наблюдения

Первые наблюдения проводились еще в пгт Научном, во время летней астрономической школы «Астротавр». Однако подготовленность была низкая. От всего наблюдательного материала пришлось отказаться. Следующие пробные наблюдения проводились во дворе моего дома находящегося в г. Симферополе.

С помощью картографических сервисов, были вычислены расстояния между местами наблюдений и все данные по ним занесены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. Координаты и расстояния между городами по меридиану

Город	Широта	Долгота	Высота	Расстояние по меридиану(л)			
				И	К	С	Т
Изобильное	44.705485	34.346086	345	—	86,12	25,97	1273,46
Красногвардейское	45.479167	34.295555	70	—	—	60,06	1334,96
Симферополь	44.939023	34.038789	290	—	—	—	1328,67
Тверь	56.888040	35.903065	160	—	—	—	—

После тщательной подготовки и отработки методики наблюдений, были выбраны два населенных пункта, которые находятся на одном меридиане – п. Красногвардейское (Рис 2.5.) и п. Изобильное (Рис 2.6.). А также выбраны две смежные даты поездки для наблюдений. Одновременно с этим были проведены наблюдения в г. Тверь моим братом и по совместительству научным руководителем.



Рисунок 2.5. – Экспедиция в п. Красногвардейское.



Рисунок 2.6. – Экспедиция в п. Изобильное.

#### 2.4. Обработка наблюдений

Поставив видеосъемку в режим таймлапс, за час–полтора до наступления истинного полудня, когда Солнце проходит наивысшую точку через небесный меридиан, а тени от объектов имеют наименьшую длину, и останавливая видеосъемку через час–полтора после этого момента, мы получаем ускоренное движение тени гномона на размеченном листе.

Дальнейшей обработкой полученного материала является поиск наикратчайшей тени и определение её длины (Рис. 2.7., Рис. 2.8. и Рис. 2.9.).

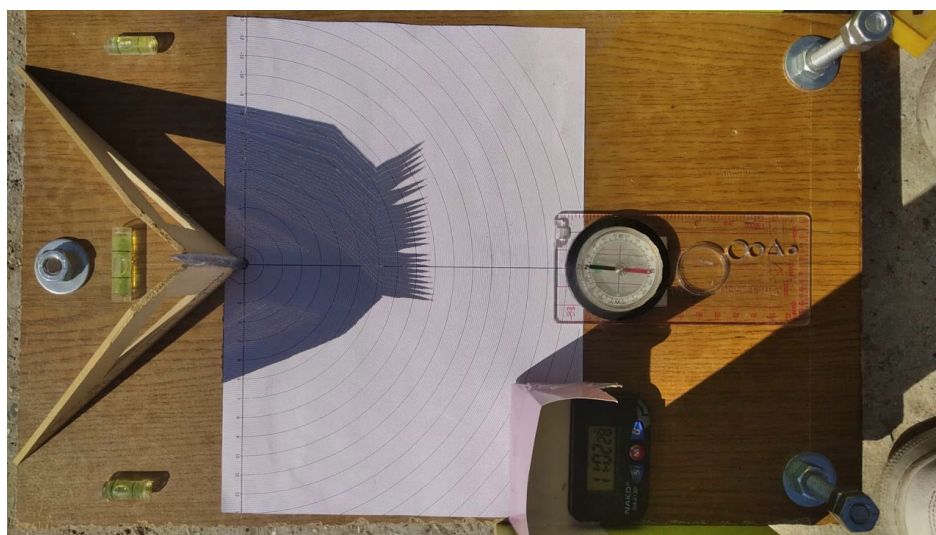


Рисунок 2.7. – Коллаж каждого 10-го кадра из п. Красногвардейский, дата наблюдений – 2023.09.23.

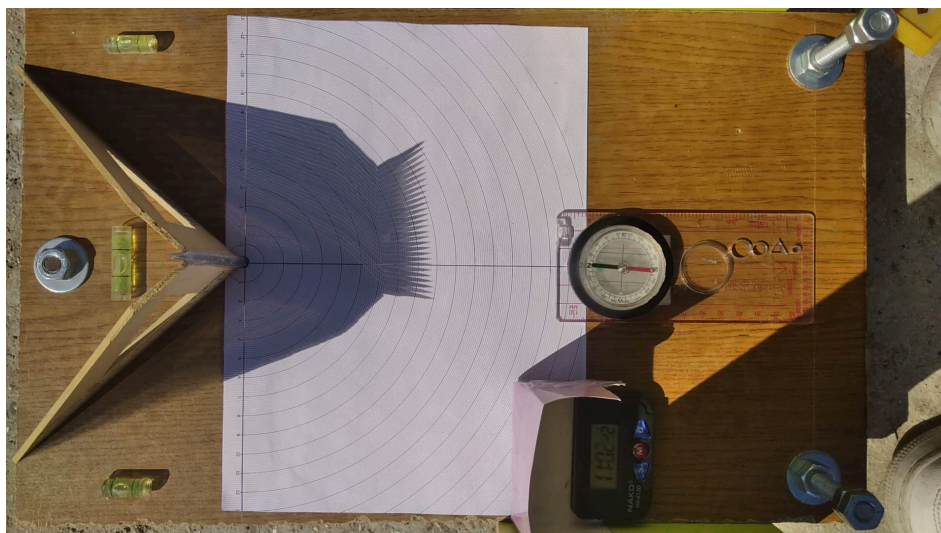


Рисунок 2.8. – Коллаж каждого 10-го кадра из п. Изобильный, дата наблюдений – 2023.09.24.

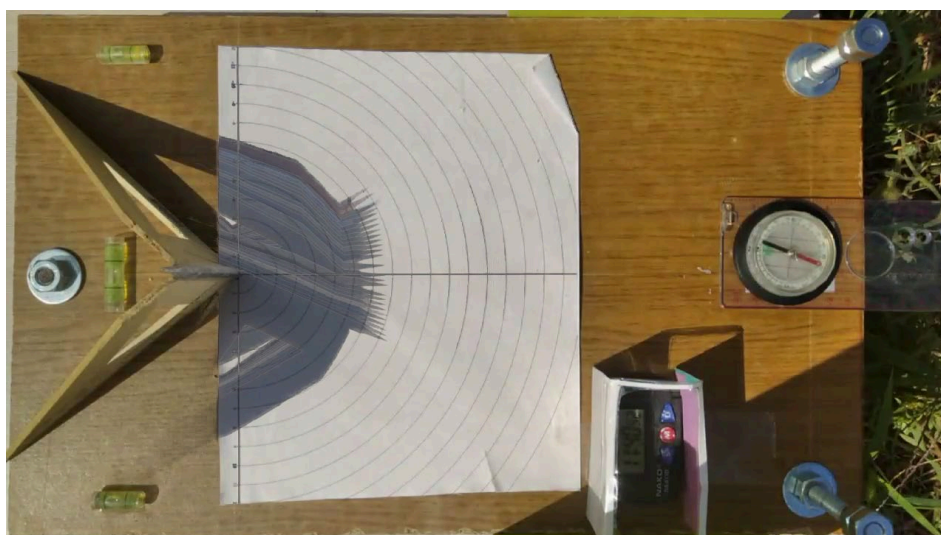


Рисунок 2.9. – Коллаж каждого 10-го кадра из г. Симферополь, дата наблюдений – 2023.09.17.

Для удобства обработки наблюдательного материала результаты видеосъемки были занесены в Таблицу 2.2.. А также было произведено вычисление высоты Солнца над горизонтом. Приняв высоту гномона равную 10 см, по формуле 1.2. получили значение в градусной мере.

Таблица 2.2. Данные обработки видеоматериала

ПП	Дата	Место	Оценка материала, 0-5	Время полудня определенное по наблюдениям за тенью	Длина тени, см	Вычисленная высота Солнца
1	24.08.2023	Симферополь	4	12:48:08	6,6	56,575°
2	02.09.2023	Симферополь	4	12:40:02	7,2	54,246°
3	03.09.2023	Симферополь	4	12:50:32	7,7	52,404°

4	16.09.2023	Симферополь	5	12:27:16	9,0	48,013°
5	17.09.2023	Симферополь	5	12:51:30	9,2	47,386°
6	17.09.2023	Тверь	5	12:37:02	14,0	35,538°
7	23.09.2023	Красногвардейское	5	12:35:57	9,9	45,288°
8	23.09.2023	Тверь	3	12:20:39	14,7	34,226°
9	24.09.2023	Изобильное	5	12:47:32	9,8	45,579°
10	24.09.2023	Тверь*	0	—	—	—
11	01.11.2023	Симферополь	4	12:39:00	16,0	32,005°
12	02.11.2023	Симферополь	4	12:46:44	16,0	32,005°
13	03.11.2023	Симферополь	4	12:18:55	16,4	31,373°

\* – Наблюдения проводились, однако в момент истинного полудня началась сильная облачность.

## 2.5. Расчёты

Моими основными наблюдательными данными должны были быть наблюдения из п. Красногвардейское и п. Изобильное, так как я хотела показать что подобные вычисления может сделать любой желающий самостоятельно.

Используя формулу 1.9. и данные из таблицы и 2.1. и 2.2., я вычислила радиус Земли равным 16967,5 км. Тогда, получается, по формуле 1.11. относительная погрешность составила 166,03%. Такой результат меня очень сильно удивил. Ведь подобные наблюдения производились за неделю до этого, 17-го сентября, в г. Симферополь и г. Тверь, и были получены очень точные значения, а именно – радиус земли равный 6425,1 км, а относительная погрешность составляла 0,74%.

Тогда было решено проверить результаты наблюдений с помощью программы Стеллариум, так как скорее всего ошибка крылась в точности измеренной тени. Была составлена таблица 2.3. из результатов наблюдений и данных из Стеллариум. И далее был произведен расчет абсолютной погрешность между измеренной и истинной высотой Солнца.

*Таблица 2.3. Вычисление абсолютной погрешности измерений*

№	Время полудня определенное по наблюдениям за тенью	Вычисленная высота Солнца	Время полудня по Стеллариум	Фактическая высота Солнца по Стеллариум	Абсолютная разница вычисленного и фактического значения	Относительная погрешность
1	12:48:08	56,575°	12:46:20	56,191583°	0,383°	0,68%
2	12:40:02	54,246°	12:43:42	53,010972°	1,235°	2,33%
3	12:50:32	52,404°	12:43:18	52,645833°	0,242°	-0,46%
4	12:27:16	48,977°	12:38:50	47,743611°	0,269°	0,56%
5	12:51:30	47,386°	12:38:28	47,357861°	0,028°	0,06%

6	12:37:02	35,538°	12:31:01	35,418528°	0,119°	0,34%
7	12:35:57	45,288°	12:35:18	44,491361°	0,797°	1,79%
8	12:20:39	34,226°	12:28:53	33,092444°	1,134°	3,43%
9	12:47:32	45,579°	12:34:45	44,875694°	0,703°	1,57%
10	—	—	12:28:31	32,703639°	—	—
11	12:39:00	32,005°	12:27:25	30,689250°	1,316°	4,29%
12	12:46:44	32,005°	12:27:24	30,371056°	1,634°	5,38%
13	12:18:55	31,373°	12:27:24	30,056833°	1,316°	4,38%

По таблице видим, что для серии наблюдений 17-го сентября ошибка определения высоты Солнца для г. Симферополь составила  $0,0281^\circ$ , а для г. Тверь –  $0,1192^\circ$ . В то время как для п. Красногвардейское и п. Изобильное –  $0,7966^\circ$  и  $0,7030^\circ$  соответственно. Возникает вопрос: неужели точность измерений так сильно влияет на конечное значение радиуса Земли?

Решено было вычислить радиус Земли по наблюдениям из г. Тверь и п. Красногвардейское на 23 сентября. Получилось, что радиус равен 6596,2 км, а относительная погрешность составила 3,4%. Получается что мы всё же измерили высоту солнца с достаточной точностью? Тогда снова возникает вопрос: почему для п. Красногвардейское и п. Изобильное погрешность составила 166,03%?

В результате размышлений появилось две теории.

Первая – расстояния между точками наблюдений играет решающую роль в точности измерения радиуса Земли.

Вторая – наблюдения проводились в смежные, но тем не менее разные дни, и Солнце за сутки успевало пройти некоторое расстояние по эклиптике и изменить свою высоту, а следовательно лучи на земную поверхности падали в разные дни под разными углами, что не соответствует обязательному условию задачи о параллельности лучей.

Для проверки первой теории я выписала значения высоты Солнца из Стеллариум для п. Изобильное, когда наблюдения проводились в п. Красногвардейское и для п. Красногвардейское, когда наблюдения проводились в п. Изобильное, словно я производила наблюдения в двух точках в один день.

*Таблица 2.4. Данные из Стеллариум*

№	Дата	Место	Время полудня по Стеллариум	Фактическая высота Солнца по Стеллариум
7.1	23.09.2023	Изобильное	12:35:06	44,264667
9.1	24.09.2023	Красногвардейское	12:34:57	44,102389

Произведя вычисления радиуса Земли, я получила, что относительная ошибка для этих пар населенных пунктов, из одного моего наблюдения и одного «виртуального» по данным из Стеллариум составляет на 23 сентября – 24,4%, а на 24 сентября – 47,6%. Хотя это существенные ошибки, но их сумма все равно

гораздо меньше той, что я получила только по своим наблюдениям для разных дней. Сделанное предположение, что основной вклад в значение вносит неточность моих измерений не подтвердилась. Хотя сами погрешности измерений скорее всего произошли из-за недостаточной точности установленной в горизонтальной плоскости установки или расположения разлинованного листа, по которому я измеряла длину тени.

Для проверки второй теории, для того чтобы исключить вклад моих неточностей в измерения, произвела расчет радиуса только по данным из Стеллариум, по таблице 2.4. для двух населенных пунктов из разных дней.

И получила радиус Земли равный 12838,6 км, а относительную погрешность 101,3%.

Составив единую Таблицу 2.5. по всем произведенным мной вычислениям для определения радиуса, из моих наблюдений и данных, полученных из программы Стеллариум, для разных населенных пунктов, в одни и те же дни, а также в смежные дни.

*Таблица 2.5. Радиусы полученные по всем наблюдениям.*

№	Высота солнца в городе А	Высота солнца в городе Б	Расстояние между А и Б, км	Радиус Земли, км	Относительная погрешность вычисления	Комментарий
1	44,4914	45,2647	86,12	6380,81	0,04%	Стеллариум К–И 23 сентября
2	44,8757	44,1024	86,12	6381,03	0,05%	Стеллариум К–И 24 сентября
3	44,4914	44,8757	86,12	12838,63	101,29%	Стеллариум К–И 23-24 сентября
4	35,4185	47,3579	1328,67	6376,17	0,03%	Стеллариум Т–С 17 сентября
5	35,4185	47,7436	1328,67	6176,61	3,16%	Стеллариум Т–С 16-17 сентября
6	33,0924	44,1024	1328,67	6914,38	8,41%	Стеллариум Т–К 23-24 сентября
7	35,5377	47,3859	1328,67	6425,17	0,74%	Наблюдения Т–С 17 сентября
8	35,5377	48,9767	1328,67	5664,62	4,32%	Наблюдения Т–С 16-17 сентября
9	34,2264	45,2879	1273,46	6596,17	3,42%	Наблюдения Т–К 23 сентября
10	45,2879	45,5787	86,12	16967,51	166,03%	Наблюдения К–И 23-24 сентября
11	34,2264	45,5787	1273,46	6427,20	0,77%	Наблюдения Т–И 23-24 сентября
12	45,2879	44,2647	86,12	4822,20	24,39%	Реал К–Стел И 23 сентября
13	45,5787	44,1024	86,12	3342,33	47,60%	Реал И–Стел К 24 сентября

Проанализируем таблицу 2.5. по строке 10 мы видим, что по наблюдениям которые должны были быть для нас основными – погрешностью в измерении радиуса Земли составляет 166,03%. А в Стеллариуме с точными данными и тем же базисом и датами – 101,29%. То есть наблюдения должны проводится строго в один день и разница даже в один день способна внести колоссальные погрешности. Однако, если посмотрим на строку 5 и 8, где

наблюдения проводились в разные дни, но за счет большого базиса погрешность получилась маленькой.

Теперь посмотрим на наблюдения которые проводились в один день. Для реальных наблюдений это будет 7, 9 где участвует город Тверь. Но так как он достаточно отдален и образует большой базис, мы эту ситуацию рассмотрели в предыдущем абзаце и не удивительно, что для наблюдений в один день. И для пары 12 и 13 из одного “реального” и одного “виртуального” наблюдений погрешность составила достаточную величину, однако их сумма не равна погрешности наших основных наблюдений.

Эти рассуждения дают нам сделать вывод по методу Эратосфена позволяющий определить радиус Земли измерением солнечной тени.

## **2.6. Выводы по методу Эратосфена**

На точность метода влияют три фактора.

Первые два фактора очевидны – это определение высоты Солнца и расстояние между пунктами наблюдений, так как это аргументы функции 1.9. Причем, можно пренебречь точностью определения высоты Солнца, если “базис” наблюдений очень большой. Однако чем меньше становится базис, тем точнее должны проводиться наблюдения высоты Солнца.

К примеру Эратосфен наблюдал тени в г. Александрия и г. Сиена (ныне называемая г. Асуан, Египет) с базисом в примерно равным 860 км, что больше базиса между п. Красногвардейское и п. Изобильное примерно равного 86 км в 10 раз. Причем одно из наблюдений было с гарантированной точностью, так как в Сиене в этот день Солнце освещало дно колодцев, а это нам говорит о том, что оно было в зените, и тут ошибки быть не может.

Третий фактор – менее очевидный, наблюдения должны проводиться строго в один день. И можно усилить это требование до того чтобы наблюдения проводились строго на одном меридиане. Так как Солнце меняет свою высоту двигаясь по эклипке день ото дня, и не образуются параллельные лучи, в котором и заключается вся суть метода. И даже наблюдая на разных меридианах с достаточно большой разницей, можно столкнуться с этой проблемой, хотя в оригинальной задаче города наблюдений находились не на одном меридиане, но поставленная задача это неявно подразумевает.

Таким образом можно сделать вывод, что изначальная ошибка измерения радиуса на основе наблюдений из п. Красногвардейское и п. Изобильное состояла не в недостаточной точности моих измерений, а в том что я выбрала разные дни для последовательного проведения наблюдений.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы я ознакомилась с такими понятиями и явлениями, как суточное и годовое движение Солнца по небосводу, узнала о влиянии наклона Земли на эти движения, а также о неравномерности этих явлений. Изучила понятия местный и истинный (солнечный) полдень, аналемма, а также историю определения радиуса Земли.

Я создала установку для произведения измерений, выработала методику работы на ней, провела необходимые наблюдения, как самостоятельно, так и совместно в разных населенных пунктах. Произвела расчеты для вычисления радиуса Земли, сравнила с современными данными и посчитала погрешности полученных результатов.

Среди всех 13 наблюдений самыми точными оказались наблюдения, проведенные 17 сентября в г. Симферополь и г. Тверь. Согласно им вычисленный радиус Земли составил 6425,1 км, а относительная погрешность со средним значением из справочной литературы составила 0,74%.

Методом Эратосфена для вычисления радиуса Земли, несмотря на кажущуюся легкость, сложен в повторении в одиночку, требует основательной подготовки и помощи посторонних людей, если вы собираетесь повторить опыт не на экваториальном поясе.

Все поставленные задачи были выполнены, полученные результаты полностью удовлетворяют целям работы.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. П. И. Бакулин, Э. В. Кононович, В. И. Мороз «Курс всеобщей астрономии», § 61. Определение радиуса Земли. Триангуляция [Электронный ресурс] – [http://crydee.sai.msu.ru/ak4/Chapt\\_3\\_61.htm](http://crydee.sai.msu.ru/ak4/Chapt_3_61.htm)
2. Статья «19 июня впервые вычислили радиус Земли» [Электронный ресурс] – <https://kpfu.ru/physics/struktura/kafedry/otdelenie-astrofiziki-i-kosmicheskoy-geodezii/19-ijunya-vpervye-vychislili-radius-zemli-418730.html>
3. Статья «Измеритель Земли» [Электронный ресурс] – <https://www.kommersant.ru/doc/3329946>
4. Эратосфен [Электронный ресурс] – <https://www.astronet.ru/db/msg/1219962>
5. Аналемма [Электронный ресурс] – <https://www.astronet.ru/db/msg/1177722>
6. Небесный меридиан [Электронный ресурс] – <https://www.astronet.ru/db/msg/1162302>
7. Калькулятор расстояний на земной поверхности [Электронный ресурс] – <https://ru.distance.to/>
8. Полдень [Электронный ресурс] – <http://ru.m.wikipedia.org/wiki/Полдень>
9. Погрешность [Электронный ресурс] – [https://ru.wikipedia.org/wiki/Погрешность\\_измерения](https://ru.wikipedia.org/wiki/Погрешность_измерения)
10. Земля [Электронный ресурс] – <https://ru.wikipedia.org/wiki/Земля>